

Koordináta rendszerek és transzformációk

Dr. Bauer Péter
BME Közlekedés- és Járműirányítási Tanszék
2015.

A repülőgépek és úrajmúvek mozgásának jellemzésére többféle koordináta rendszer is elterjedt a gyakorlatban ([5],[6],[7]). Ennek oka, hogy egyes jelenségek leírása nagyban függ a választott koordináta (vonatkoztatási) rendszertől melyhez viszonyítva az adott jelenséget leírjuk. Más rendszert célszerű választani például a repülőgépre ható légerők és a repülőgép Földhöz képesti mozgásának jellemzésére. Mi ezek közül a koordináta rendszerek közül a repülőgépekhez kapcsolódókat tekintjük át, főként a rövid távú repülések jellemzéséhez szükségesekre koncentrálva.

A mozgásegyenletek felírása során az is fontos szempont, hogy a kiválasztott koordináta rendszer – amiben dolgozunk – inercia rendszer, vagy sem. *Inercia rendszer* az álló, vagy állandó sebességgel egyenes vonalon haladó rendszer.

A Földhöz kötött koordináta rendszerek szigorúan véve nem tekinthetők inercia rendszernek, mert a Föld forog a tengelye körül és kering a Nap körül. Így szükséges lehet egy a Naphoz és az állócsillagokhoz kötött vonatkoztatási rendszer használata is.

A Föld keringő mozgását általában elhanyagolhatjuk, így elegendő a Föld forgását figyelembe venni. A következő részekben a Föld forgásának jellemzésétől jutunk el egy a földfelszínhez képest lokálisan mozgó repülőgép mozgásának jellemzéséhez az összes szükséges koordináta rendszert definiálva.

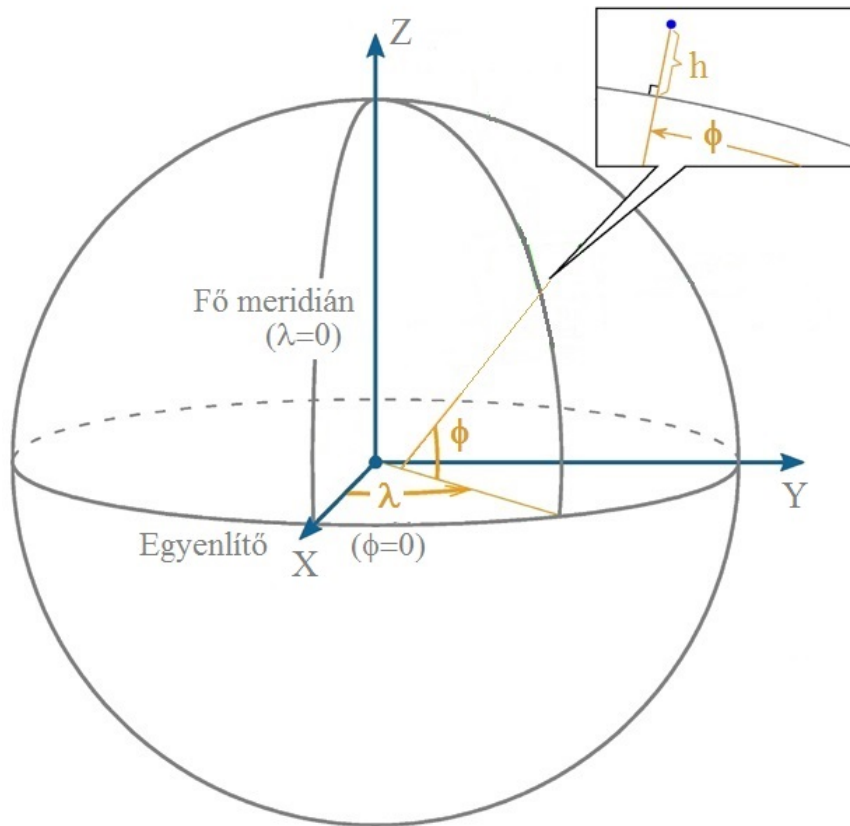
ECI (Earth Centered Inertial, azaz Föld középpontú inercia) rendszer

Ennek origóját a Föld középpontjához rögzítik, Z tengelye az északi pólus felé mutat és azon halad át, X és Y tengelye az egyenlítő síkjában fekszik és adott, rögzített irányba állítják be. Ez egy nem forgó, így inercia rendszernek tekinthető koordináta rendszer, amihez képest a Föld forgása jellemezhető.

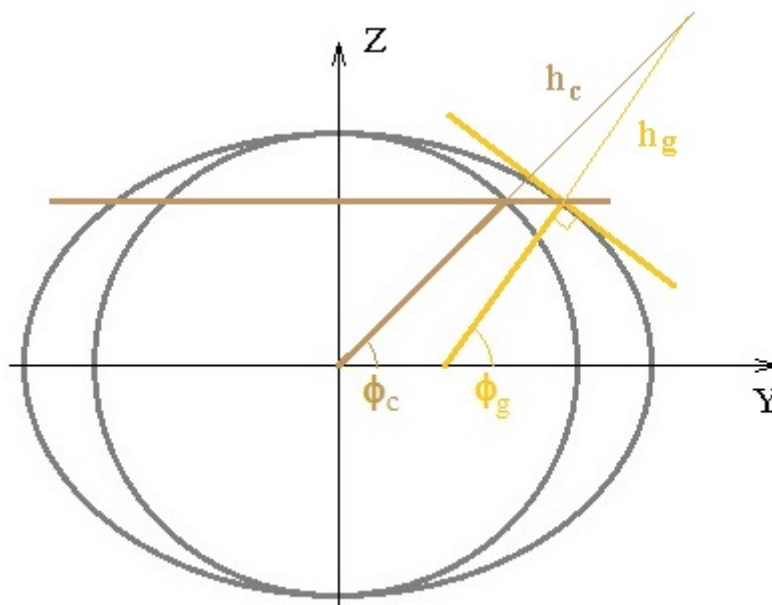
ECEF (Earth Centered Earth Fixed, azaz Föld középpontú, földhöz rögzített) rendszer

Ennek origóját a Föld középpontjához rögzítik, Z tengelye az északi pólus felé mutat és azon halad át, X és Y tengelye az egyenlítő síkjában fekszik és X tengelye a fő meridiánon (greenwichi délkör) halad át (lásd 1. ábra). Egy a Föld felszínén, alatta, vagy felette elhelyezkedő pont jellemzése ebben a rendszerben egyszerűen a pont (X, Y, Z) koordinátáinak megadásával történik. A legtöbb műholdas rendszer (a GPS is) alapvetően ezt használja, mert nem szükséges hozzá egy ellipszoid modell használata, csak a Föld középpont pozíciójának és a rendszer orientációjának ismerete.

A gyakorlatban mégis az LLA (Latitude, Longitude, Altitude azaz szélesség, hosszúság, magasság) adatokat használják GPS koordinátákként. Ennek oka, hogy a térképeken is a földrajzi koordináta rendszer szerint adják meg a pozíciót, ami sokkal könnyebben értelmezhető, mint az ECEF koordináták.



1. ábra ECEF koordináta rendszer és LLA koordináták (eredeti ábra forrása [9])



2. ábra Geodetikus és geocentrikus szélesség

Az LLA koordináták értelmezését is az 1. ábra mutatja. λ a hosszúság (0 – 360 fok, vagy -180 – +180 fok), ϕ a szélesség (-90 – +90 fok) h pedig a magasság.

Az ECEF koordinátákkal szemben ezek meghatározásához már egy a Föld alakját leíró geometriai modell is szükséges. A GPS a WGS84 geoid modellt használja. A hosszúság (λ) átszámítása ECEF koordinátákból járulékos adatok ismerete nélkül is lehetséges. A szélesség

(ϕ) és magasság (h) azonban már függ az alkalmazott geometriai modelltől. Ezt szemlélteti a 2. ábra, ahol ugyanannak a szélességi körnek a geodetikus és geocentrikus szélességi szögei láthatók. A geocentrikus szöveget a gömb modellhez képest adják meg a gömb középpontjából az adott pontba mutató vektornak az egyenlítő síkjával bezárt szögét figyelembe véve. A geodetikus szöveget az ellipszoid modellhez képest definiálják, mint az adott pontban az ellipszoid érintősíkjából merőlegesen az egyenlítő sík felé húzott egyenes szögét. Ez az egyenes nem megy át az ellipszoid középpontján.

A 2. ábra azt is mutatja, hogy adott ECEF koordinátákkal jellemzett pont magasság adata is függ a választott geometriai modelltől. A gömbhöz képest más magassági koordinátát kap, mint az ellipszoidhoz képest.

Végül példaként álljon itt Budapest pozíciójának LLA és ECEF megadása:

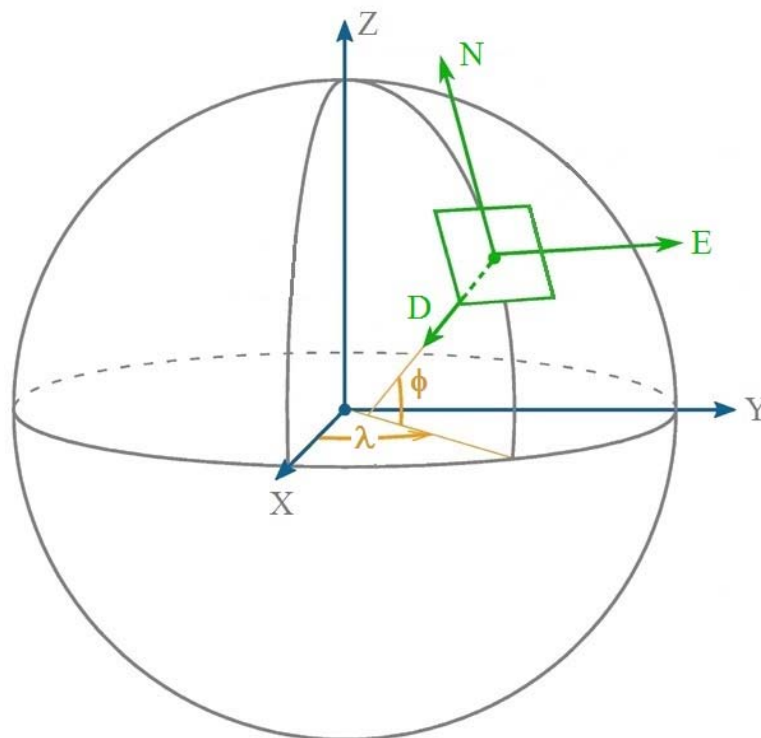
Latitude (szélesség) 47.486978 fok, longitude (hosszúság): 19.047353 fok, magasság: 235m

ECEF: X = 4081.675 km, Y = 1409.208 km, Z = 4678.693 km

A földrajzi fókálózat ismeretében az LLA pozíció értelmezése sokkal könnyebb.

NED (North, East, Down, azaz észak, kelet, lefelé) rendszer

Ezt a rendszert a 3. ábra szemlélteti. Navigációs, vagy föld koordináta rendszernek is nevezik.



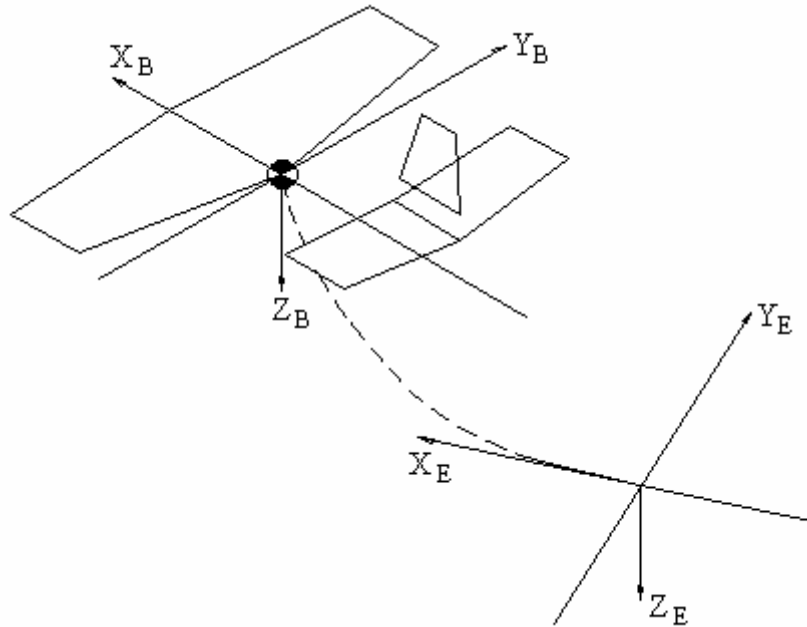
3. ábra NED koordináta rendszer (eredeti ábra forrása [9])

A földfelszín egy adott pontjához (adott LLA / ECEF pozíció) rögzített helyi koordináta rendszer, melynek X (N) tengelye az ellipszoid északi pontja (geodetikus észak), Y (E) tengelye az ellipszoid keleti iránya (geodetikus kelet) Z (D) tengelye pedig az ellipszoid belseje felé mutat a helyi normálvektor mentén.

Kis távolságú, rövid időtartamú repülések esetén ezt a rendszert szoktuk föld koordináta rendszernek (X_E Y_E Z_E) tekinteni és inercia rendszerként számolni vele.

Body (test) rendszer

Ezt a rendszert a légieszköz törzséhez képest definiáljuk úgy, hogy origója a gép súlypontjában van, X_B tengelye a gép szimmetriasíkjában az orr felé mutat, Y_B tengelye a gép jobb oldala felé mutat, Z_B tengelye pedig lefelé (lásd 4. ábra).



4. ábra A test és föld koordináta rendszerek

Stability (stabilitási) rendszer

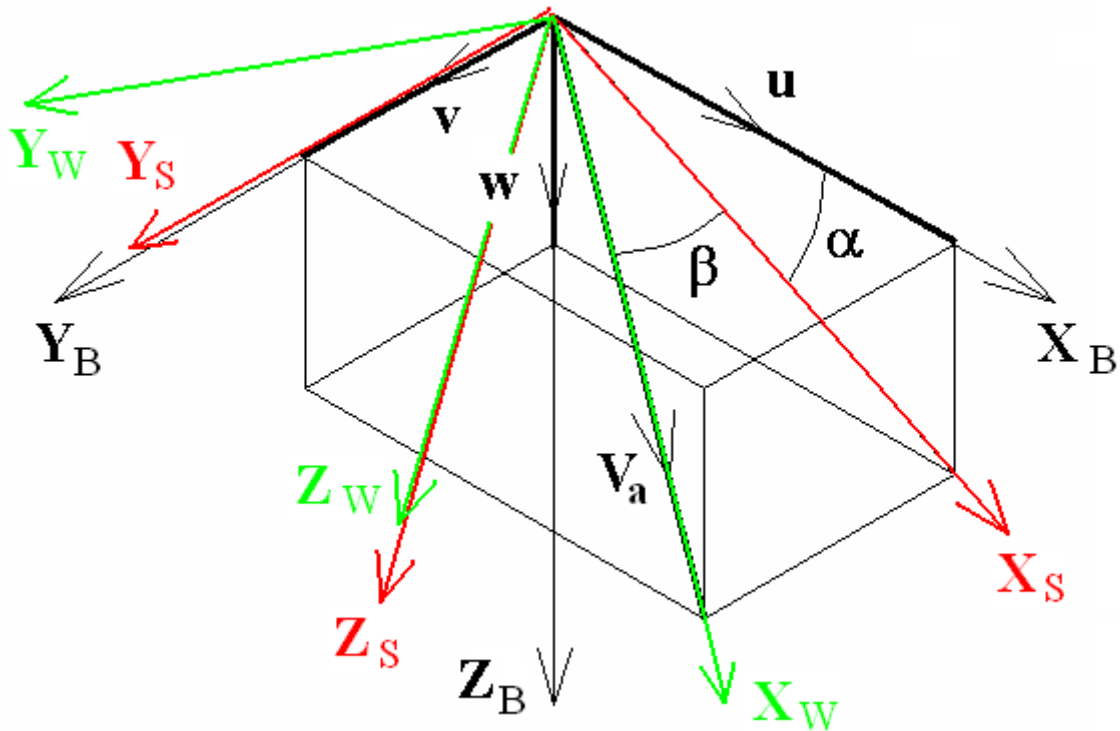
Ezt a szél rendszerrel együtt az 5. ábra szemlélteti. Úgy kapható meg a test rendszerből, hogy azt az Y_B tengely körül az α állásszöggel leforgatjuk, míg X tengelye egybe nem esik a repülőgép V_a levegőhöz képesti sebességvektorának X - Z síkra való vetületével. Ezzel persze a Z tengely is elfordul, és más helyzetet vesz fel. A tengelyek jelölése: X_s , Y_s , Z_s

Wind (szél) rendszer

A stabilitási rendszerből kapható meg azt a Z tengelye körül β csúszási szöggel elforgatva, míg X tengelye egybe nem esik a repülőgép V_a levegőhöz képesti sebességvektorával. Ez a rendszer is az 5. ábrán látható.

Megjegyzés: az állás- és csúszási szögeket a levegőhöz képesti sebességvektor u , v , w komponenseiből (lásd 5. ábra) az alábbi módon számíthatjuk:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{w}{u}\right), \quad \beta = \arcsin\left(\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}\right)$$



5. ábra A test (B), a stabilitási (S) és a szél (W) koordináta rendszerek

Transzformációk

Az egyes koordináta rendszerek közti transzformációkat csak az ECEF rendszertől indulva adjuk meg egészen a szél rendszerbe való áttérésig bezárólag. Alapvetően az orientációk transzformációjával foglalkozunk, ha a két rendszer origója nem esik egybe, akkor – ha lehet – feltételezzük, hogy azt egy eltolási transzformációval már egy pontba mozgattuk. Ha ez a feltevés nem lehetséges, megadjuk a szükséges eltolási transzformációt.

Transzformáció ECEF-ből LLA-ba

Ehhez a transzformációhoz szükséges a figyelembe vett referencia ellipszoid egyes paramétereinek ismerete. A WGS84 ellipszoid modell (ezt használja a GPS) paramétereit:

- fél nagytengely (semi major axis): $a = 6378137 \text{ m}$
- fél kistengely (semi minor axis): $b = a(1 - f) = 6356752.31424518 \text{ m}$
- ellipszoid lapultsága (ellipsoid flattening): $f = \frac{1}{298.257223563}$
- első numerikus excentricitás (first eccentricity): $e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = 0.08181919$
- második numerikus excentricitás (second eccentricity): $e' = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}} = 0.0820944$

Végül a transzformációs kifejezések:

$$\lambda = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right) \quad \phi = \arctan\left(\frac{Z + e'^2 b \cdot \sin^3 \theta}{p - e^2 a \cdot \cos^3 \theta}\right) \quad h = \frac{p}{\cos \phi} - N$$

$$p = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad \theta = \arctan\left(\frac{Z \cdot a}{p \cdot b}\right) \quad N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}}$$

Ahol N a görbületi sugár az adott szélességi körön.

Transzformáció LLA-ból ECEF-be

$$X = (N + h) \cos \phi \cdot \cos \lambda \quad Y = (N + h) \cos \phi \cdot \sin \lambda \quad Z = \left(\frac{b^2}{a^2} N + h\right) \sin \phi$$

Transzformáció ECEF-ből NED-be

Ez a transzformáció már leírható egy úgynevezett forgatási mátrixszal a két koordináta rendszer között, mivel az ECEF és a NED is derékszögű koordináta rendszerek. Az LLA rendszer polár koordinátákkal adott, ezért abból a derékszögű rendszer(ekbe) nem lehetséges az egyszerű forgatással való áttérés.

A repülőgépek mozgását figyelembe véve a sebességvektorok és a pozíció vektorok transzformációját mutatjuk be.

A transzformációs összefüggés az ECEF rendszerbeli sebességek (v_X, v_Y, v_Z) és a NED rendszerbeli sebességek (v_N, v_E, v_D) között:

$$\begin{bmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \phi \cdot \cos \lambda & -\sin \phi \cdot \sin \lambda & \cos \phi \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\cos \phi \cdot \cos \lambda & -\cos \phi \cdot \sin \lambda & -\sin \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{bmatrix}$$

A pozíciókra vonatkozóan a transzformációt körültekintően kell kezelni. A következő összefüggés ugyanis egy ECEF rendszerbeli helyvektor NED rendszerbeli képét adja meg (N, E, D a NED rendszerbeli pozíciók):

$$\begin{bmatrix} N \\ E \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \phi \cdot \cos \lambda & -\sin \phi \cdot \sin \lambda & \cos \phi \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\cos \phi \cdot \cos \lambda & -\cos \phi \cdot \sin \lambda & -\sin \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Ha ezt a transzformációt a NED rendszer origóját megadó $ECEF_0$ vektorra hajtjuk végre, akkor kell megkapnunk a NED rendszerbeli $(0, 0, 0)$ koordinátákat. Ehelyett egy $NED_0 \neq 0$ vektort kapunk. Ez a bevezetőben említett eltolási transzformáció szükségességét mutatja ebben az esetben. Összességében egy pont NED rendszerbeli pozíciója:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N \\ E \\ D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\sin \phi \cdot \cos \lambda & -\sin \phi \cdot \sin \lambda & \cos \phi \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\cos \phi \cdot \cos \lambda & -\cos \phi \cdot \sin \lambda & -\sin \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_0 \\ E_0 \\ D_0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\sin \phi \cdot \cos \lambda & -\sin \phi \cdot \sin \lambda & \cos \phi \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\cos \phi \cdot \cos \lambda & -\cos \phi \cdot \sin \lambda & -\sin \phi \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Látható, hogy mindkét esetben (sebesség vagy pozíció) a NED rendszerbeli értékek a hosszúsági és szélességi koordináták függvényei.

Megjegyzés: az irodalom szerint a GPS a pozíciót és a sebességet is alapvetően ECEF rendszerben méri, innen transzformálja aztán LLA / NED rendszerbe.

Transzformáció NED-ből test rendszerbe

A kétféle rendszer a 4. ábrán látható, a NED rendszert tekinthetjük inercia (föld) rendszernek és tengelyeit jelölhetjük $(X_E \ Y_E \ Z_E)$ -vel. A test rendszer tengelyei pedig $(X_B \ Y_B \ Z_B)$.

Nyilvánvalóan egy föld rendszerben reprezentált vektort *test* rendszerben más koordináták jellemeznék. A két rendszer közötti transzformációra és egyúttal a test rendszer orientációjának jellemzésére többféle megoldás is elterjedt. Alkalmazhatók a Rodriguez paraméterek, quaternió, Euler szögek vagy akár rögtön a forgatási mátrix (DCM = direction cosine matrix). Ebben a jegyzetben az Euler szögekkel való transzformációt mutatjuk be részletesen.

A vektorok (és így a koordináta-rendszerek) közötti áttérést három elforgatásból álló kötött sorrendű transzformációval, az úgynevezett Euler szögek (ψ azimutszög, θ bólintási szög, ϕ bedöntési szög) felhasználásával oldhatjuk meg. A transzformáció az alábbi sorrendben történik:

$$(X_E \ Y_E \ Z_E) \xrightarrow{\psi} (X_1 \ Y_1 \ Z_1) \xrightarrow{\theta} (X_2 \ Y_2 \ Z_2) \xrightarrow{\phi} (X_B \ Y_B \ Z_B)$$

Azaz az $(X_E \ Y_E \ Z_E)$ föld rendszerből ψ szöggel a Z_E tengely körül forgatva először a köztes $(X_1 \ Y_1 \ Z_1)$ rendszerbe térünk át (legyező mozgás). Innen az Y_1 tengely körül θ szöggel forgatva térünk át a köztes $(X_2 \ Y_2 \ Z_2)$ rendszerbe (bólintó mozgás). Végül onnan ϕ szöggel az X_2 tengely körül forgatva érkezünk az $(X_B \ Y_B \ Z_B)$ *test* rendszerbe (bedöntés / orsózás).

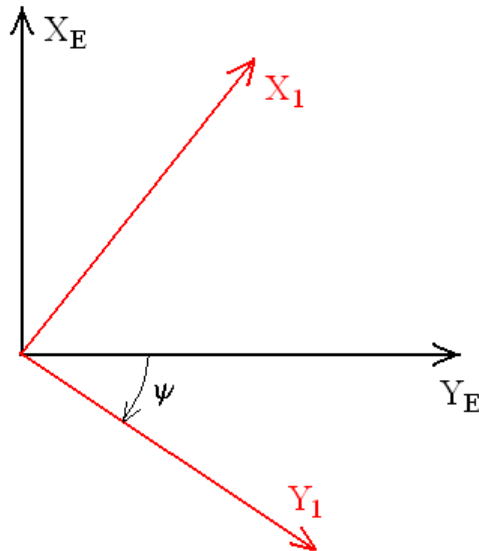
Az egymás utáni transzformációkat, a megfelelő forgatási mátrixok jellemzik a következő módon:

$$T_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$T_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

Ezek közül csak T_ψ levezetését közöljük részletesen, mert a többi ebből analóg módon előállítható. Az $(X_E \ Y_E \ Z_E) \xrightarrow{\psi} (X_1 \ Y_1 \ Z_1)$ transzformáció szemléltetése a 6. ábrán látható. Mivel a Z tengely körül forgatunk, ezért ennek az irányából nézzük a két koordináta rendszert.



6. ábra Transzformáció földből 1-es átmeneti rendszerbe

A forgatási mátrix a kiinduló koordinátarendszer egységvektorainak új (elforgatott) rendszerbeli képe alapján építhető fel. Így a T_ψ mátrix első oszlopa az $(X_E \ Y_E \ Z_E)$ rendszer X tengelyirányú egységvektorának $(X_1 \ Y_1 \ Z_1)$ -beli képe. A mátrix többi oszlopa rendre az Y és Z tengely irányú vektorok képe $(X_1 \ Y_1 \ Z_1)$ -ben.

Föld \rightarrow *test* transzformáció esetén, az eredő T_{BE} transzformációs mátrix a következő (a mátrix szorzás és a transzformációs lépések sorrendje fordított):

$$T_{BE} = T_\phi \cdot T_\theta \cdot T_\psi$$

A BE alsó index a megszokott konvenciónak megfelelően a transzformáció irányát jelzi föld (E) rendszerből test (B) rendszerbe visszafelé indexelve. Itt érdemes megjegyezni, hogy mind az egyes forgatási mátrixok, mind az eredő mátrix ortogonálisak, ami azt jelenti, hogy inverzük megegyezik a transzponáltjukkal.

Így egy \underline{v}_E *föld* rendszerbeli vektor transzformációja *test* rendszerbe (\underline{v}_B) a következő:

$$\underline{v}_B = T_{BE} \underline{v}_E$$

Az inverz transzformáció pedig az alábbi alakú:

$$\underline{v}_E = T_{EB} \underline{v}_B = (T_{BE})^T \underline{v}_B$$

A két rendszer kapcsolatának Euler szögekkel való megadása után felmerül az igény a *test* rendszer szögsebessége (repülőgép, vagy helikopter eredő szögsebessége) és az Euler szögek deriváltjai közötti kapcsolat tisztázására. Erre azért van szükség, mert a *test* rendszer forgásával az Euler szögek folyamatosan változnak. Ezt a változást a szögek deriváltjai adják meg, ezekből az új szögértékek integrálással számíthatók.

A szögsebességek kapcsolata az Euler szögek megjelenési sorrendjének figyelembe vételével határozható meg. A transzformáció során először az $(X_E \ Y_E \ Z_E)$ föld rendszerben jelenik meg egy Z_E irányú $\underline{\dot{\psi}}$ szögsebesség vektor, minek következtében $(X_E \ Y_E \ Z_E)$ ψ szöggel elfordulva $(X_1 \ Y_1 \ Z_1)$ -be megy át. Ezt követően $(X_1 \ Y_1 \ Z_1)$ -ben jelenik meg az Y_1 irányú $\underline{\dot{\theta}}$ szögsebesség vektor. Ebből adódik az $(X_2 \ Y_2 \ Z_2)$ rendszer. Ez a második forgatás azonban már hat az előző lépésben megjelent $\underline{\dot{\psi}}$ vektorra, ezért annak $(X_2 \ Y_2 \ Z_2)$ -beli képét transzformációval (T_θ) ki kell számítani. A harmadik lépésben jelenik meg $(X_2 \ Y_2 \ Z_2)$ -ben az X_2 irányú $\underline{\dot{\phi}}$ vektor, mellyel az $(X_2 \ Y_2 \ Z_2)$ rendszer $(X_B \ Y_B \ Z_B)$ rendszerbe megy át. Természetesen ekkor már mind a $\underline{\dot{\theta}}$, mind a $\underline{\dot{\psi}}$ $(X_2 \ Y_2 \ Z_2)$ -beli képének transzformációját el kell végezni.

Összességében egy Euler szög szögsebesség vektora, a megjelenése után fellépő összes transzformációs lépésen keresztül megy. A három vektor $(X_B \ Y_B \ Z_B)$ -beli képe adja meg a *test* rendszer X, Y, Z irányú p, q, r szögsebesség komponenseit. Elsőként adjuk meg az Euler szögek szögsebesség vektorait azon transzformációs lépésben kapott koordinátarendszerben, ahol megjelennek (ezt az alsó index jelzi):

$$\underline{\dot{\psi}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}_1 \quad \underline{\dot{\theta}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}_2 \quad \underline{\dot{\phi}} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_B$$

Így végül:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = T_\phi \cdot T_\theta \cdot \underline{\dot{\psi}} + T_\phi \cdot \underline{\dot{\theta}} + \underline{\dot{\phi}} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \sin \theta \cdot \dot{\psi} \\ \cos \phi \cdot \dot{\theta} + \sin \phi \cdot \cos \theta \cdot \dot{\psi} \\ -\sin \phi \cdot \dot{\theta} + \cos \phi \cdot \cos \theta \cdot \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Ezzel megkaptuk az összefüggéseket az Euler szögek szögsebességei és a *test* rendszer X, Y, Z irányú p, q, r szögsebesség komponensei között. Nekünk azonban általában a fordított kapcsolat felírása szükséges. Ezt a fenti egyenlet három ismeretlenes egyenletrendszerként való megoldásával írhatjuk fel. A megoldandó egyenletrendszer:

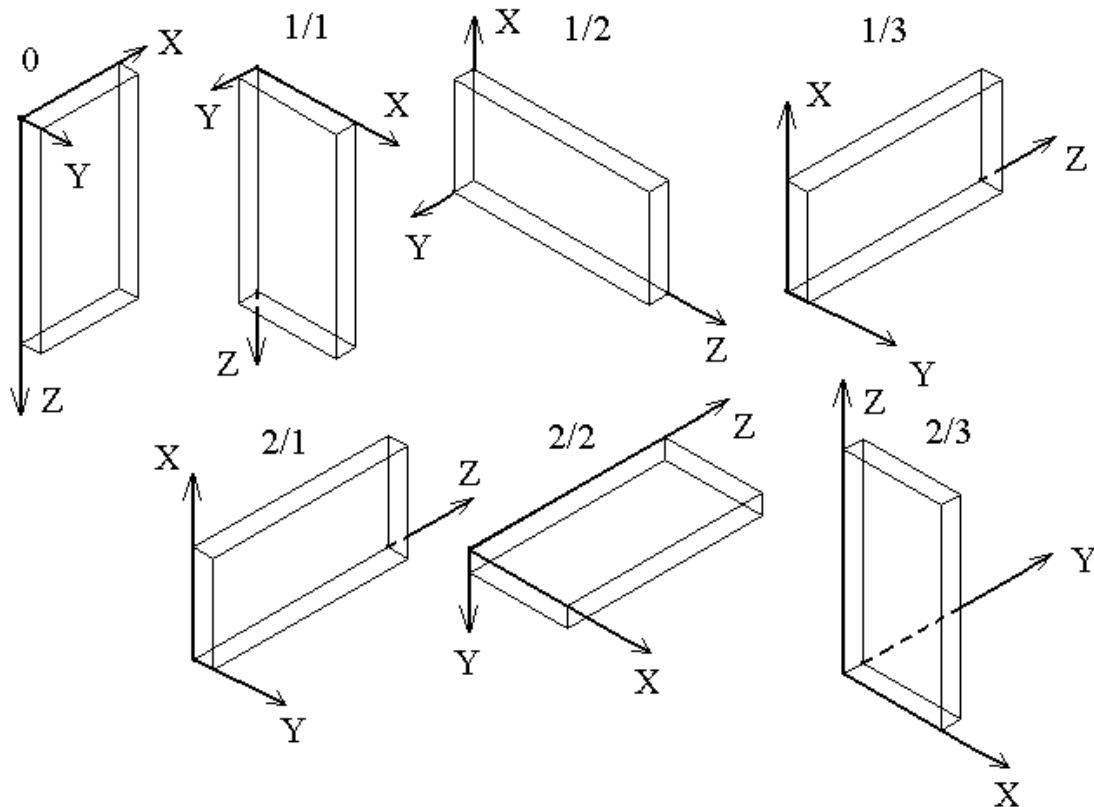
$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cdot \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cdot \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

A rendszer az együtthatómátrix invertálásával oldható meg. A megoldás:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p + \tan \theta \cdot \sin \phi \cdot q + \tan \theta \cdot \cos \phi \cdot r \\ \cos \phi \cdot q - \sin \phi \cdot r \\ \frac{\sin \phi}{\cos \theta} \cdot q + \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \cdot r \end{bmatrix}$$

Megjegyzés: Euler szögekkel való forgatás esetén, ha egyszer rögzítettük a forgatási sorrendet, azt mindig tartani kell, mert más sorrendű forgatás a test más orientációját eredményezi. Ezt szemlélteti a 7. ábra, ahol egy téglatest kétféle sorrendű elforgatása látható a két sorban. 0 jelöli a kiinduló pozíciót, 1 az első, 2 a második forgatási sorozatot. Mindkét esetben a megadott tengelyek körül 90° -al forgatjuk el a téglatestet, de más sorrendben. Az 1. sorozat a szokásos $Z - Y - X$ Euler szög sorrendnek felel meg, a 2. viszont az $Y - Z - X$ sorrendnek. Látható, hogy a kétféle forgatás teljesen más végső pozíciót eredményez.

Fontos még tudni, hogy mechanika könyvekben szoktak más sorrendű (nem Z – Y – X) Euler szöges forgatásokat is definiálni.



7. ábra Z-Y-X (1) és Y-Z-X (2) forgatási sorrend eltérő végső orientációkkal

Transzformáció test rendszerből stabilitási rendszerbe

Ezt az α állásszögre támaszkodva, az Y tengely körüli forgatás mátrixát figyelembe véve lehet meghatározni. A teljes transzformációs összefüggés a következő:

$$\underline{v}_S = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}}_{T_{SB}} \underline{v}_B$$

Ahol \underline{v}_S egy stabilitási rendszerbeli vektor.

Transzformáció stabilitási rendszerből szél rendszerbe

Ezt a β csúszási szögre támaszkodva, a Z tengely körüli forgatás mátrixát figyelembe véve lehet meghatározni. A teljes transzformációs összefüggés a következő:

$$\underline{v}_W = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T_{WS}} \underline{v}_S$$

Ahol \underline{v}_W egy szél rendszerbeli vektor.

Az inverz transzformációk mindkét utóbbi esetben is a transzponált mátrixokkal definiáltak.

Példa a koordináta rendszerek közti áttérésre

Egy pilóta nélküli repülőgép 20 m/s levegőhöz képesti sebességgel, $\beta = 3^\circ$ csúszási- és $\alpha = 10^\circ$ állásszöggel repül a következő Euler szögekkel jellemzett test rendszer orientációval: $\phi = -30^\circ$ $\theta = 5^\circ$ $\psi = 45^\circ$ Földhöz képesti pozíciója éppen Budapest LLA koordinátaival jellemzett: $\lambda = 47.486978^\circ$ $\phi = 19.047353^\circ$ $h = 235\text{m}$.

Feladat: határozzuk meg a gép levegőhöz képesti sebességvektorát szél, stabilitási, test, föld (NED) és ECEF rendszerben.

A sebességvektor szél rendszerben mindig csak az X tengely irányába mutat, tehát:

$$\underline{v}_W = [20 \ 0 \ 0]^T$$

A stabilitási rendszerbeli vektor a megadotthoz képest az inverz transzformáció alkalmazásával határozható meg, β ismeretében:

$$\underline{v}_S = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T_{SW}} \underline{v}_W = \begin{bmatrix} 0.99863 & -0.052336 & 0 \\ 0.052336 & 0.99863 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19.9726 \\ 1.04672 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A test rendszerbeli vektor szintén inverz transzformációval számítható α ismeretében:

$$\underline{v}_B = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}}_{T_{BS}} \underline{v}_S = \begin{bmatrix} 0.9848 & 0 & -0.1736 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.1736 & 0 & 0.9848 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19.9726 \\ 1.04672 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19.669 \\ 1.04672 \\ 3.4672 \end{bmatrix}$$

Ezt a vektort az Euler szögek ismeretében, a test \rightarrow föld transzformációs mátrix kiszámításával lehet föld (NED) rendszerbe transzformálni:

$$\underline{v}_{NED} = \underline{v}_E = T_{EB} \underline{v}_B = \begin{bmatrix} 0.7044 & -0.6432 & -0.3002 \\ 0.7044 & 0.5816 & 0.4069 \\ -0.0872 & -0.4981 & 0.8627 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19.669 \\ 1.04672 \\ 3.4672 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.1411 \\ 15.8748 \\ 0.7556 \end{bmatrix}$$

Végül a NED \rightarrow ECEF transzformáció szintén a megadott összefüggés invertálásával lehetséges a szélesség és hosszúság koordináták figyelembe vételével:

$$\underline{v}_{ECEF} = \begin{bmatrix} -0.2205 & -0.7371 & -0.6388 \\ -0.2406 & 0.6758 & -0.6968 \\ 0.9452 & 0 & -0.3263 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12.1411 \\ 15.8748 \\ 0.7556 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14.8619 \\ 7.2803 \\ 11.2298 \end{bmatrix}$$

Felhasznált és ajánlott irodalom

- [1] Bokor József, Gáspár Péter: *Irányítástechnika járműdinamikai alkalmazásokkal*, Typotex kiadó, Budapest, 2008.
- [2] Bauer Péter: *Repülőgépek egyszerű referencijel követő szabályzóinak tervezése LQ Servo módszerrel*, Matlab/Simulink környezetben, BME Közlekedésautomatikai Tanszék, 2009.
(url:
http://www.kjit.bme.hu/images/stories/targyak/automatikus_fedelzeti/lq_servo_tervezes.pdf)
- [3] Lantos Béla: *Irányítási rendszerek elmélete és tervezése, egyváltozós szabályozások*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2005.
- [4] Prof. Bokor József és szerzőtársai: *Irányítástechnika gyakorlatok*, Typotex kiadó, Budapest, 2012.
- [5] Randal W. Beard, Timothy W. McLain: *Small Unmanned Aircraft, Theory and Practice*, Princeton University Press, 2012.
- [6] Scott Gleason, Demoz Gebre-Egziabher: *GNSS Applications and Methods*, Artech House, 2009.
- [7] Rohács József, Gausz Zsanna, Gausz Tamás: *Repülésmechanika, egyetemi jegyzet*, Typotex kiadó 2012. (www.tankonyvtar.hu)
- [8] μ BLOX: Datum Transformations of GPS Positions, Application Note, 5th July 1999.
- [9] Guowei Chai, Ben M. Chen and Tong Heng Lee: *Unmanned Rotorcraft Systems*, Advances in Industrial Control, Springer, London, 2011.